Beräkningsinriktad matematikutbildning för maskinteknikprogrammet på Chalmers

Mikael Enelund
Tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola
URL: http://www.chalmers.se/am/SV/forskning/forskningsavdelningar/dynamik
E-post: mikael.enelund@chalmers.se

Håkan Johansson
Tillämpad mekanik, Chalmers tekniska högskola
URL: http://www.chalmers.se/am/SV/forskning/forskningsavdelningar/material
E-post: hakan.johansson@chalmers.se

Stig Larsson
Matematiska vetenskaper, Chalmers tekniska högskola
URL: http://www.math.chalmers.se/~stig
E-post: stig@chalmers.se

Sammanfattning

En stor utmaning för ingenjörsutbildningarna är att anpassa sig till och att dra nytta de nya möjligheterna som utvecklingen av datorer (hård- och mjukvara) har lett till för såväl ingenjörsarbete som undervisning. Speciellt matematikutbildningen har haft svårt att ta till sig de nya möjligheterna. Detta har bland annat lett till studenterna har ifrågasatt matematikkursernas innehåll och nytta. Här presenterar vi en reformerad matematikutbildning. I den reformerade matematikutbildningen integreras traditionell symbolisk matematik med numeriska beräkningar och datorn används som ett verktyg. Vidare är många datorövningar och räkneuppgifter hämtade från maskintekniken och lösningarna analyseras och diskuteras med hjälp av simuleringar.

Erfarenheterna är mycket positiva. Studenternas intresse för beräkningar och simuleringar har ökat. Studenterna anser i mycket hög grad att datorn är ett viktigt hjälpmedel vid inlärning och förståelse av matematiken. Traditionell symbolisk analys är fortfarande viktig och nödvändig. Studenternas förmågan att lösa speciella differentialekvationer och integraler som är vanliga i härledningar och speciella problem i mekaniken har inte försämrats. Studenterna tränas i algoritmtänkande och i ett logiskt tänkande som är värdefullt även i andra typer av problemlösning. Resultatet på kurserna är gott och kurserna är uppskattade av studenterna. Studenterna gör bättre och mer avancerade analyser i följande konstruera-bygga-implementera-kurser. För att konceptet skall vara framgångsrikt är det viktigt med en första kurs i programmering i nära samarbete med matematikkursen. Programmeringsmiljön (här Matlab) skall vara densamma som i matematikkurserna. Vidare är samarbetet med parallella teknikkurser viktigt. Det har också visat sig att studenterna anser inlärningen av mekaniken har underlättas genom samarbetet. Undervisning och träning av matematik sker även i de parallella tillämpade kurserna och eftersom matematiken hämtar sina exempel från tillämpningar undervisas och tränas även de ämnena i matematikkurserna.

1 Inledning

Utvecklingen av datorer, hårdvara och mjukvara, har lett till helt andra förutsättningar för ingenjörsarbete där matematiskt mycket komplexa problem löses i datorn och simuleringar spelar en central roll. Datorutvecklingen har också lett till bättre förutsättningar för undervisning i matematik och andra ingenjörsämnen. Det går att lösa inte bara speciella, förenklade problem utan även allmänna och realistiska problem och lösningarna visualiseras enkelt. Visualiseringarna kan användas för att underlätta förståelsen och inlärningen samt öka intresset för matematiken. Trots den uppenbara kopplingen mellan datorutveckling och matematik har i allmänhet grundläggande kurser och läroböcker i matematik inte dragit nytta av utvecklingen. I CDIO-projektets modell för ingenjörsutbildning betonas bland annat problemlösningskedjan och förmågan att omsätta färdigheter i praktiken, se [1]. Detta har påverkat de konstruktionsnära kurserna och idag finns förutsättningar för att bygga fysiska modeller och prototyper på många utbildningsprogram. En viktig del i problemlösningskedjan är simuleringar och behovet av ett virtuellt prototyplabb (dvs ett ingenjörsverktyg för beräkning och simulering) är uppenbart. Införandet av detta kräver en mer beräknings- och simuleringsinriktad grundläggande matematikutbildning. Vidare är vi övertygade om att beräkningsaspekter av matematiken skall vara med från början och hela tiden i kurserna. Därför att detta gör det möjligt att studera mer realistiska problem och använda simuleringar som ökar förståelsen och motiverar studier av matematik. Läsåret 2007/2008 startade en sådan matematikutbildning på civilingenjörsprogrammet i maskinteknik på Chalmers. Hörnstenar i den nya matematikutbildningen är

- Att tydliggöra beräkningar och simuleringar.
- Integration av numerisk och symbolisk analys i de grundläggande matematikkurserna.
- Datorövningar där studenterna löser problem inklusive visualisering genom att utveckla egna program i Matlab.
- Finita elementmetoden, som undervisas och används redan i årskurs 1 i matematik- och mekanikkurserna.
- Uppgifter och tillämpningar hämtas från de parallella kurser i mekanik och hållfasthetslära och från andra maskinkurser. Tekniskt relevanta problem löses.
- Nära samarbete med parallella kurser i mekanik och hållfasthetslära, bland annat genom gemensamma projektuppgifter.

I arbetet med den reformerade matematikutbildning har vi specifikt utvecklat:

- En grundläggande kurs i programmering i Matlab.
- Kompendium och föreläsningsanteckningar i beräkningsmatematik.
- Beräkningsorienterade datorövningar och projektuppgifter som används i både matematikkurserna och parallella kurser i termodynamik och mekanik och hållfasthetslära.

2 Maskinteknikprogrammet

Civilingenjörsprogrammet i maskinteknik har organiserat utbildningen med fokus på ingenjörens yrkesroll, integration av icketekniska färdigheter och sammanhang. Vi har en stark bas i matematik och grundläggande maskintekniska ämnen där helhet och gemensamma principer för modellering och simulering betonas, till exempel, genom att ha gemensamma projekt och uppgifter mellan matematik och mekanik. I dessa projekt löses hela problemet från att välja modell och ställa upp ekvationer som beskriver modellen till att lösa ekvationer och simulera samt att bedöma rimlighet i val av modell och noggrannheten i lösning. Genom att arbeta med helhet, gemensamma projekt och sekvensen av kurser undviker man att utbildningen inom ett ämne isoleras till en kurs. Programmet introducerar och använder tidigt datorbaserade hjälpmedel för att modellera, analysera och simulera verkliga konstruktioner, produkter och system. Tillämpningar från de grundläggande ämnena introduceras tidigt i utbildningsplanen för att förbereda för konstruera-implementera-(design-build)-projekt där verkliga och relevanta produkter och system skall skapas. Det finns minst ett projekt i varje årskurs.

Till grund för programutveckling och programuppföljning ligger en CDIO-baserad programbeskrivning med programlärmål som bryts ner i kursmål via en programdesignmatris. Programbeskrivningen hittar man på programhemsidan [2].

Vi citerar ur programmets lärmål i matematik.

Civilingenjören i maskinteknik skall:

1 Kunna tillämpa matematik och grundläggande naturvetenskap inom den tillämpade mekaniken och ha inblick i den klassiska fysikens mest grundläggande metoder. Centralt är att

   1.1 kunna numeriskt lösa linjära och olinjära system av algebraiska ekvationer,

   1.2 kunna lösa ordinära differentialekvationer av typerna: separabla, inhomogena med konstanta koefficienter och Eulers,

   1.3 kunna numeriskt lösa system av linjära och olinjära ordinära differentialekvationer inklusive omskrivning till system av första ordningens differentialekvationer,

   1.4 kunna lösa egenvärdesproblem för diskreta och kontinuerliga system,

   1.5 kunna använda finita elementmetoden för att lösa partiella differentialekvationer,

   1.10 utifrån givna modeller och matematiska formuleringar programmera lösningar, inklusive grafiskt presentation till tekniska problem i Matlab.

4 Kunna formulera teoretiska modeller och ställa upp ekvationer som beskriver modellerna. Lösa ekvationerna för att simulera verkligheten samt bedöma rimligheten i val av modell och noggrannheten i lösningen.

Kurserna i matematik har utvecklats för att uppfylla dessa mål. Den nya utbildningen omfattar alla matematikkurser i årskurs 1. Matematikkurserna och parallella kurser i årskurs 1 listas nedan (läsåret delas in i fyra läsperioder om åtta veckor).

- Läsperiod 1. Inledande matematisk analys (7.5 hp), Programmering i Matlab (4.5 hp) och Ingenjörsmetodik (fortsätter i läsperiod 2).

- Läsperiod 2. Matematisk analys i en variabel (7.5 hp), Termodynamik (4.5 hp) och Ingenjörsmetodik (7.5 hp).

- Läsperiod 3. Linjär algebra (7.5 hp) och Mekanik & hållfasthetslära del 1 (7.5 hp).
- Läsperiod 4. Matematisk analys i flera variabler (7.5 hp) och Mekanik & hållfasthetslära del 2 (7.5 hp).

Årskurs 3 innehåller också två matematikkurser: Matematisk statistik och Transformer och differentialekvationer. Dessa är inte inkluderade i den nya matematikutbildningen och diskuteras därför inte här. I årskurs 3 finns en valbar kurs i finita elementmetoden. Denna kurs är en fortsättning på kurserna Matematisk analys i flera variabler och Mekanik & hållfasthetslära del 2. Numeriska beräkningar och Matlab-programmering ingår också i merparten av de tillämpade kurserna i årskurs 2 och 3, till exempel Maskinelement, Mekatronik, Integrerad konstruktion och tillverkning, Tillverkningsteknik, Strömningsmekanik, Reglerteknik, Värmeöverföring, etc. De avslutande två åren, specialiseringen, görs i ett masterprogram. Numeriska beräkningar och Matlab-programmering ingår i flertalet masterprogram.

3 Den reformerade matematikutbildningen

Den bärande tanken med den reformerade matematikutbildningen är fullständig integration av beräkningar (numerisk analys) och analytisk matematik. Detta kräver datorer och en programmeringsmiljö. Vi valde Matlab därför att det är en lämplig miljö, den är enkel att använda, det finns många inbyggda funktioner och ”toolboxes” (paket) för tillämpningar samt för att Matlab används både i senare kurser och i forskningen på institutioner kopplade Maskinteknikprogrammet. Det är också relativt enkelt att skapa grafer, simuleringar och animeringar. Matlab används av studenterna för beräkningar och illustrationer av matematiska koncept och fenomen med hjälp av avancerade inbyggda funktioner och paket, studenterna skriver egna program för implementering av numeriska algoritmer och för att lösa tekniska problem från tillämpningarna samt för att presentera resultat. Vi tycker att det är mycket viktigt att studenterna skriver egna program. Detta ger studenterna programmeringsfärdigheter och kunskaper samt det ökar studenternas förståelse för matematik och algoritmbyggande. Slutligen, ger det studenterna självförtroende att lösa hela problem, ger träning i abstrakt och logiskt tänkande samt problemlösande, vilket är mycket värdefullt i kommande kurser och arbetslivet.

Användningen av datorberäkning i matematikkurserna ökar motivationen för att studera svåra matematiska begrepp. När vi genererar approximativa följder med intervallhalveringsmetoden blir det nödvändigt och meningsfullt att studera konvergens av talföljder och vi kan genomföra beviset av Bolzanos sats. Integralsatser i flervariabelanalysen kan i en traditionellt upplagd kurs endast användas för att skriva om svåra integraler, vilket nog studenten (i vart fall professorn!) uppfattar som ganska meningslöst. Vi kan nu motivera Gauss divergenssats genom att härleda värmeledningsekvationen med blandade randvillkor (samt påpeka likheten med elasticitetsteorins randvärdesproblem) och genom att härleda finita elementmetoden. För ytterligare diskussion av detta se [3].

Kurslitteraturen är två traditionella läroböcker, [4], [5], kompletterade med ett kompendium i ”Beräkningsmatematik” och datorövningar.

Undervisningen bedrivs i form av föreläsningar (6 timmar/vecka), räkneövningar (4 timmar/vecka), datorövningar (2–4 timmar/vecka) och projektuppgifter. Examinationen sker huvudsakligen i form av skriftlig tentamen men med inslag av bonuspoäng från duggor och datorövningar i en omfattning som varierar mellan kurserna.

Nedan följer en kortfattade beskrivning av kurserna med tyngdpunkt på de beräkningsorienterade inslagen.

3.1 Inledande matematik

Kursen behandlar funktioner i en variabel, kontinuitet och derivata. Vektorgeometri i planet och rummet samt Gauss eliminationsmetod för linjära ekvationssystem ingår också.

Vi betonar beviset av Bolzanos sats (satsen om mellanliggande värden) via bisektionsalgoritmen där begreppen Lipschitz-villkor, konvergent följd, decimalutveckling (= reellt tal) används. Datorövningar:

1. Funktionsgalleri. Att rita grafer för ett stort antal funktioner vars utseende man bör känna till.
2. Geometri. Att skriva Matlab-funktioner för skalärprodukt, projektion med mera.
3. Bisektionsalgoritmen. Implementera intervallhalveringsmetoden för att förstärka förståelsen av Bolzanos sats.
4. Fixpunktsiteration. Matlab-funktion som baseras på fixpunktssatsen för kontraktionsavbildning.
5. Numerisk derivata. Matlab-funktion för approximativ beräkning av derivata.
6. Newtons metod. Matlab-funktion för Newtons metod med numerisk derivata (återkommer i läsperiod 2 och 4).

3.2 Matematisk analys i en variabel

Vi fortsätter envariabelanalysen och beräkningsinslagen handlar om beräkning av integralen och lösning av ordinära differentialekvationer och avser även att förstärka förståelsen av integralens definition och differential- och integralkalkylens fundamentalsats (om att varje kontinuerlig funktion har en primitiv funktion).

Datorövningar. Vi skriver egna Matlab-funktioner för följande:

1. ODE1: primitiv funktion.
2. ODE2: Eulers metod för system av ODE.
3. ODE3: implicita metoder för system av ODE.
4. ODE4: randvärdesproblem (inskjutningsmetod med Newtonlösare från läsperiod 1). Tillämpas på värmeledningsproblem i en variabel.

3.3 Linjär algebra

En i stort sett traditionell kurs i linjär algebra, men med datorövningar hämtade från den parallella kursen i mekanik och hållfasthetslära:

1. Matrishantering.
2. Geometri.

3. Felanalys vid lösning av ekvationssystem (konditionstal för matris).

4. Minsta kvadratmetod (kalibrering av Nortons lag för krypning).

3.4 Matematisk analys i flera variabler

Förutom de traditionella inslagen i flervariabelanalysen introducerar vi randvärdesproblem för partiella differentialekvationer och finita elementmetoden. Vi börjar med randvärdesproblem i en variabel av generell form:

$$
\begin{aligned}
-D(a(x)Du(x)) + c(x)u(x) &= f(x) && \text{för } x \in I = (K, L), \\
a(x)D_n u(x) + k(x)(u(x) - u_A) &= g(x) && \text{för } x = K,\ x = L,
\end{aligned}
$$

och härleder finita elementmetoden i en variabel. Diskussionen bygger på differential- och integralkalkylens fundamentalsats och partialintegration. Därefter kan vi göra motsvarande i flera variabler:

$$
\begin{cases}
-\nabla \cdot (a\nabla u) + cu = f & \text{i } D, \\
\hat{\mathbf{N}} \cdot (a\nabla u) + k(u - u_{\mathrm{A}}) = g & \text{på } S_2 \text{ (Neumann/Robin)}, \\
u = u_{\mathrm{A}} & \text{på } S_1 \text{ (Dirichlet)}.
\end{cases}
$$

Här får vi användning av Gauss divergenssats (en flervariabelversion av fundamentalsatsen) och partialintegrationsformeln

$$
\iiint_D \nabla \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}V = \iint_S \hat{\mathbf{N}} \cdot \mathbf{F}\phi \,\mathrm{d}S - \iiint_D \mathbf{F} \cdot \nabla\phi \,\mathrm{d}V.
$$

Randvärdesproblemen tolkas i termer av värmeledning, men analogin med hållfasthetslärans ekvationer påvisas också. Vi anser att det är mycket viktigt att härleda och förstå betydelsen av randvillkoren i denna generella form för att studenten ska kunna använda professionella finita elementprogram där samtliga termer förekommer.

Datorövningar:

1. Visualisering av flervariabelfunktioner.

2. Jacobi och Newton. Newtons metod för system av ekvationer med numerisk beräkning av Jacobi-matrisen.

3. Extremvärdesproblem. Kritiska punkter beräknas med föregående Newtonlösare.

4. Finita elementmetoden i 1-D. Vi använder ett Matlab-program för envariabelproblem med samma datastrukturer som i ”PDE Toolbox” som en förberedelse för nästa övning. (Övningen inkluderas i följande avsnitt.)

5. Finita elementmetoden i 2-D. Vi använder Matlabs ”PDE Toolbox”.

4 Projektuppgifter och datorövningar

Här presenterar vi exempel på en datorövning och en projektuppgift. Datorövning 4 är hämtad från kursen Matematisk analys i flera variabler medan Projektuppgift 2 är hämtad från kursen Mekanik & hållfasthetslära 2. Genom att gå till Chalmers studieportal [6] kan man finna kursernas hemsidor och där hittar man samtliga övriga uppgifter. Målen med Datorövning 4 är många, t ex, att att lära sig hur man löser randvärdesproblem i en variabel med finita elementmetoden i Matlab, att tillämpa och förstå stångens och den rotationssymmetriska skivans differentialekvationer och att öka motivationen för att studera matematik. Den ger även en förberedelse för Matlabs PDE Toolbox för finita element i två variabler. Målet med Projektuppgift 2 är flerfaldiga, t ex, att lära sig hur man löser elastiska randvärdesproblem med finita elementmetoden och Matlabs PDE Toolbox, att utveckla en känsla för spänningsfördelningar och hur abrupta ändringar i geometrin leder till spänningskoncentrationer, ge introduktion till feluppskattning och adaptiv nätförfining i finita elementmetoden och att öka motivationen för att studera elasticitetsteori och matematik.

Datorövning 4 — Finita elementmetoden i 1-D

Allmänt

Dokumentera ditt arbete i ett pdf-dokument. Spara detta till examinationen och så att du kan läsa på inför tentamen. Datorövningarna kan ge upp till 3 bonuspoäng till tentamen. Datorövningarna examineras i vecka 7–8 genom att du visar upp din skriftliga dokumentation och kör dina program för din lärare. Dessutom kommer ett väsentligt antal tentamensfrågor handla om detta material.

Samarbete uppmuntras, men detta är inget grupparbete. Varje student måste göra sina egna datorprogram och sina egna dokument. Den som inte har full kontroll över detta klarar inte examinationen.

Litteratur

`Fö 4.2 FEM1`.

Matlab-program

`MyPoissonSolver.m`. `BdryData1.m`. `EqData1.m`.

Kopiera filerna genom att klicka på länkarna här eller gå till länken "Matlab" på kurshemsidan och ladda ned dem därifrån. Skriv `help MyPoissonSolver` på kommandoraden och läs dokumentationen.

Inledning

Programmet `MyPoissonSolver` löser randvärdesproblem av typen

$$\begin{aligned} -D(a(x)Du(x)) + d(x)Du(x) + c(x)u(x) &= f(x), && \text{för } x \in I = (K, L), \\ a(x)D_n u(x) + k(x)(u(x) - u_A) &= g(x), && \text{för } x = K,\ x = L. \end{aligned}$$

Här är $D = \frac{d}{dx}$ och D_n riktningsderivatan i utåtriktningen, dvs $D_n = -\frac{d}{dx}$ i $x = K$ och $D_n = \frac{d}{dx}$ i $x = L$. Programmet bygger på finita elementmetoden med styckvis linjära funktioner.

Funktionen `MyPoissonSolver` med deklarationen

```
function [U, A, b] = MyPoissonSolver(p, t, e, EqData, BdryData)
```

ställer upp och löser ekvationssystemet $AU = b$, där A är styvhetsmatrisen, b är lastvektorn och vektorn U innehåller nodvärdena $U_i = U(x_i)$ till finita elementlösningen $U(x) = \sum_{i=1}^{n} U_i \phi_i(x)$.

Information om beräkningsnätet lagras i matriserna `p,t,e` med samma struktur som i Matlabs PDE Toolbox som vi ska använda senare (även i mekanikkursen). Problemets data, a, d, c, f, u_A, g, definieras i funktionsfilerna `EqData.m` och `BdryData.m`.

Matrisen `p`. Koordinaterna för noderna

$$K = x_1 < x_2 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_{n-1} < x_n = L$$

lagras i vektorn `p` av typ $1 \times n$.

Matrisen `t` av typ $3 \times (n-1)$ innehåller information om de $n-1$ intervallen

$$I_i = (x_i, x_{i+1}), \quad i = 1, \ldots, n-1.$$

Närmare bestämt innehåller kolonn nr i de index (pekare) som pekar på ändpunkterna i intervall nr i, dvs

$$\begin{bmatrix} i \\ i+1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Den siffran är ett märke (”subdomain reference tag”), som jag satt till 1 här, och som kan användas till att markera vilket delområde som intervallet tillhör, om man fått för sig att dela in intervallet I i delområden. Detta kan vara praktiskt om koefficienterna ges av olika formler i olika delar av I.

Matrisen `e` innehåller information om randpunkterna,

$$e = \begin{bmatrix} 1 & n \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Här är första raden pekare (index) som pekar på de två randpunkterna, här x_1 och x_n. Den andra raden är märken (”reference tags”) som används för att markera vilken randpunkt det är, här betyder 1 vänster ändpunkt och 2 höger ändpunkt. Eftersom man använder pekare spelar det ingen roll i vilken ordning man skriver dem. Följande matris ger samma resultat:

$$e = \begin{bmatrix} n & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Detsamma gäller matrisen `t`.

Detta kan verka onödigt omständligt, men det är en bra förberedelse för PDE Toolbox, där denna struktur behövs för att beskriva en indelning av ett två-dimensionellt område i trianglar. I två dimensioner finns ju ingen naturlig numrering av punkter, trianglar och randpunkter och man måste använda pekare på detta vis. I PDE Toolbox syftar `p,t,e` på ”points”, ”triangles”, ”edges”.

Uppgifter

Redovisa en av uppgift 3, 4, 5.

Uppgift 1. Styckvis linjär funktion.

Skapa ett nät i intervallet $I = (0, 1)$ med endast $n = 9$ punkter (så att man kan tydligt se alla).

```
>> p=linspace(0,1,n)
>> t=[1:n-1; 2:n; ones(1,n-1)]
>> e=[1 n; 1 2]
```

Skapa och plotta en styckvis linjär funktion, till exempel,

```
>> V=sin(7*p)
>> plot(p,V,'.-')
```

Kom ihåg att funktionen kan skrivas som en linjär kombination av basfunktionerna:

$$V(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i \phi_i(x),$$

där $V_i = V(x_i)$ är nodvärdena som vi skapade nyss. Skapa och plotta basfunktionen även ϕ_5. (Läs FÖ 4.2 FEM1!!)

Uppgift 2. MyPoissonSolver

Kör programmet med samma nät och de bifogade funktionsfilerna `EqData1.m`, `BdryData1.m`. Läs dokumentationen (`help MyPoissonSolver`) och filerna för att se vilket randvärdesproblem det är.

```
>> [U, A, b] = MyPoissonSolver(p, t, e, @EqData1, @BdryData1);
```

Titta på styvhetsmatrisen A och se att den är tridiagonal.
Plotta den approximativa lösningen U och den exakta lösningen u.
Förfina nätet till $n = 101$ punkter och beräkna igen.

Uppgift 3. Värmeledning i inhomogent material

Lös följande randvärdesproblem

$$\begin{aligned} &-D(aDu) = f \quad \text{i } I = (0, 1), \\ &u(0) = u(1) = 0, \end{aligned}$$

med

$$f(x) = x, \quad a(x) = 1 \text{ för } x < 1/2, \; a(x) = 10 \text{ för } x > 1/2.$$

Detta är Datorövning 6 från lp2. Vad är den fysikaliska betydelsen?
Skriv nya funktionsfiler `EqData3.m` och `BdryData3.m` för denna uppgift.

Uppgift 4. Stång av två material

Lös följande randvärdesproblem

$$
\begin{aligned}
&-D(EA\,Du) = \rho g A \quad \text{i } I = (0, L),\\
&u(0) = 0,\ E(L)A\,Du(L) = P,
\end{aligned}
$$

med

$$
E(x) = \begin{cases} 7, & x < L/2, \\ 22, & x > L/2, \end{cases} \qquad \rho(x) = \begin{cases} 3, & x < L/2, \\ 8, & x > L/2, \end{cases}
$$

och $L = 1,\ A = 1,\ g = 9.81$. Här har vi använt dimensionlösa storheter, dvs alla variabler är multipler av lämpligt valda referensvärden. Till exempel, E ges som multipel av $E_0 = 10^{10}$ $\mathrm{N/m^2}$ och ρ som multipel av $\rho_0 = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$ (aluminium och järn).

Experimentera med olika värden på P. Vad är den mekaniska betydelsen av randvärdesproblemet?

Skriv nya funktionsfiler `EqData4.m` och `BdryData4.m` för denna uppgift.

Frivillig uppgift: Visa att med referensvärden

$$
E_0 = 10^{10}\,\mathrm{N/m^2},\ \rho_0 = 10^3\,\mathrm{kg/m^3},\ L_0 = 1\,\mathrm{m},\ g_0 = 1\,\mathrm{m/s^2},\ A_0 = 10^{-4}\,\mathrm{m^2},
$$

blir enheterna för u och P

$$
u_0 = \frac{\rho_0 g_0 L_0^2}{E_0} = 10^{-7}\,\mathrm{m},\ P_0 = \rho_0 g_0 A_0 L_0 = 10^{-1}\,\mathrm{N}.
$$

Uppgift 5. Elasticitet i rotationssymmetri

Lös följande randvärdesproblem (i polära koordinater)

$$
\begin{aligned}
&-\frac{d^2u}{dr^2} - \frac{1}{r}\frac{du}{dr} + \frac{1}{r^2}u = \frac{1-\nu^2}{E}K_r \quad \text{för } r \in I = (a, b),\\
&u(a) = 0,\ u'(b) = 0.
\end{aligned}
$$

med $K_r = \rho\omega^2 r$. Innan man kan använda finita elementmetoden måste ekvationen skrivas om till formen $-D(aDu) + cu = f$. Gör följande omskrivning:

$$
-\frac{1}{r}\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr}) + \frac{1}{r^2}u = \frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r.
$$

och sedan

$$
-\frac{d}{dr}(r\frac{du}{dr}) + \frac{1}{r}u = \frac{1-\nu^2}{E}\rho\omega^2 r^2.
$$

Välj lämpliga värden på $a, b, \rho, \omega, E, \nu$. Obs att den inre radien a bör vara > 0. Vad är den mekaniska betydelsen av detta problem?

Skriv nya funktionsfiler `EqData5.m` och `BdryData5.m` för denna uppgift.

Projektuppgift 2 — Spänningskoncentration beräknad med FEM

Uppgiften omfattar en spänningsberäkning av en plan skiva med tre hål. Skivan belastas med normalspänningen σ_0 (jämnt utbredd över sidan) enligt figur. På grund av symmetri hos både last och geometri behöver endast en fjärdedel av skivan modelleras och analyseras. Fördelen med detta är att beräkningstid sparas. Materialet i skivan är stål som antas vara linjärt elastiskt med $E = 200$ GPa och $\nu = 0.30$. Skivans tjocklek är $t = 26$ mm, övriga mått enligt figur. Skivan är en förenklad modell av ett horisontellt tvärstag på oljeplattformen Alexander Kielland som havererade 1980. Det initiala brottet skedde i en svets vid det cirkulära hålet där en fläns för ultraljudutrustning var fastsatt.

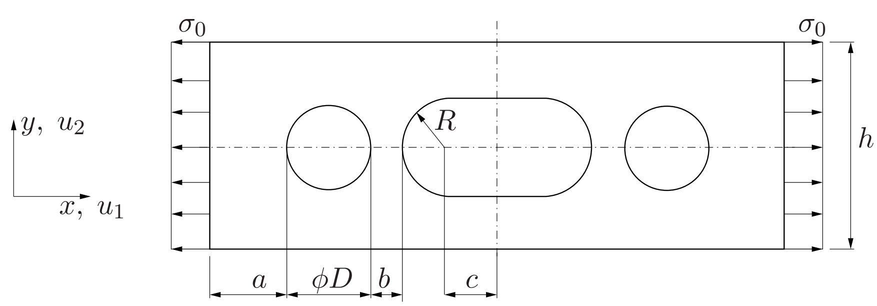
Antag att det råder plant spänningstillstånd. Använd finita elementmetod (FEM) i Matlabs PDE Toolbox. Speciellt skall spänningskoncentrationsfaktorn K_t vid kälradierna uppskattas. Spänningskoncentrationsfaktorn definieras här som

$$K_\mathrm{t} = \sigma_\mathrm{max}/\sigma_\mathrm{nom}$$

σ_max fås ej direkt ur PDE Toolbox, men kan bestämmas med hjälp av huvudspänningarna. Jämför den beräknade spänningskoncentrationsfaktorn med elementarfall i ”KTH Handbok och formelsamling i hållfasthetslära”.

Matlab skall sköta allt räknande dvs inget handräknande. En skriftlig handledning till PDE Toolbox av Peter Möller finns att tillgå. I denna finns ett exempel vars lösning återges i detalj. Om du först lägger ner någon timma på att reproducera denna lösning, så bör det vara möjligt att göra färdigt uppgiften på 2 timmar.

Geometri och indata



Parametervärden (alla mått i mm):

$$h = 1200,\ a = 500,\ D = 300,\ b \in (50, 200),\ R = 180,\ \text{och}\ c = 250.$$

Konsolens tjocklek är $t = 26$ mm. Måttet b kan alltså variera mellan 50 mm och 200 mm. Välj ett värde som är delbart med 10.

Anvisningar

1 Välj en längd b enl. ovan. Redovisa valet.

2 Utnyttja symmetrin och modellera 1/4 av skivan. Applicera randvillkor och lägg på randspänningen σ_0 (välj ett lämpligt värde på σ_0 och notera detta). På symmetriränderna uppstår blandade randvillkor dvs i ena riktningen föreskrivs förskjutningen noll och i den andra föreskrivs spänningen noll (fundera igenom detta).

3 Markera *Adaptive mode* i **Solve - Parameters**. Notera antalet element som strukturen delas in i.

4 Plotta huvudspänningarna, normalspänningarna och skjuvspänningen. Rita deformerat elementnät. Om ni skriver ut på svart-vit skrivare, så brukar färgskalan ”hot” ge bäst resultat. Genomföra detta för två olika elementnät för att bedöma noggrannheten.

5 Beräkna formfaktorn K_t. Jämför med elementarfall för fallet med ett hål i ”KTH Handbok och formelsamling”. Diskutera huruvida anvisningarna samverkar vad det gäller lokal spänningsförhöjning.

5 Utvärdering och resultat

Alla kurserna är utvärderade enligt Chalmers modell för kursvärderingar som bygger på tre möten mellan lärare och en referensgrupp om 5–7 studenter. Vid slutmötet deltar även programledning och institutionsledningen är inbjuden. Till stöd för slutmötet finns en webbaserad enkät som skickas ut till alla studenter. I enkäterna har vi lagt till specifika frågor om matematikutbildningen och kopplingen till parallella kurser. Vid slutmötet skrivs ett protokoll som länkas till kursens sida i Chalmers studieportal. I Appendix visas resultat från frågor i enkäten till kursen Matematisk analys i flera variabler. Svarsfrekvensen i enkäterna har legat mellan 30%och 60% på cirka 170 studenter. Vidare har vi haft samtal med lärare i parallella och senare kurser.

Ett mycket tydligt resultat är att studenterna uppskattar exempel från tekniska tillämpningar i matematikkurserna. De anser att det är viktigt att se vad matematiken används till och att det ökar motivationen att studera matematik. Studenterna anser i hög grad att det är naturligt att använda datorn i matematiken dels för att de kan lösa mer avancerade problem men också för att det gör matematiken mer begriplig och ökar deras förståelsen. Studenterna anser att datorövningarna och samarbetet med den parallella kursen ökar motivationen att studera båda kurserna. Motivationen för att studera den parallella teknikkursen förefaller ha ökat i något högre grad än motivationen för att studera matematik. Även om skillnaden är liten är detta är ett något oväntat resultat.

En oro är att studenterna prioriterar ner och inte lär sig den traditionella analysen som behövs till exempel för att lösa speciella integraler och differentialekvationer som är viktiga i tillämpade ämnen. Av samtal med studenter framgår det att motivationen för den mer traditionella analysen är hög och att den blir mer begriplig med hjälp av datorövningarna. Lärare i parallella kurser menar att förmågan till traditionell analys inte har försämrats men ej heller förbättrats. Resultaten på övningsskrivningar och tentamina bekräftar detta. Studenternas förmåga och intresse för att utföra traditionell analys måste följas upp kontinuerligt inte minst för den oro som finns hos övriga lärare. Lärare har också uttryckt en oro att datorn och Matlab bara blir en ”svart låda” som levererar resultat utan att man vet hur. Vi anser att det finns inget fog för denna oro eftersom studenterna skriver egen kod för att lösa ekvationssystem, integraler och differentialekvationer etc och för att många problem är hämtade från tillämpningar där det ingår att bedöma resultatens rimlighet. Lärare i parallella kurser har märkt en markant förbättring i förmågan att programmera Matlab, vilket inte är förvånade med tanke på programmeringskursen och alla datorövningar.

I produktutvecklingsprojekten i årskurs 2 har analyserna blivit mer avancerade och av högre kvalitet. Det är vanligt att finita elementmetoden används i analyserna. Detta är en klar förändring och förbättring av projekten som vi noterat efter att vi infört undervisning i finita elementmetoden i årskurs 1. Från kursenkäten i Matematiks analys i flera variabler, se Appendix, noterar vi att studenterna kan formulera randvillkor för värmelednings- och hållfasthetsproblem. Att formulera fysikaliska randvillkor ingick tidigare bara i de ämnesspecifika teknikkurserna. Vidare ser vi att studenterna anser sig någorlunda insatta i finita elementmetoden och at de kan lösa maskintekniska problem med metoden. Detta är mycket glädjande. Finita elementmetoden ingick tidigare i specialiseringarna i slutet av utbildningen. Eftersom finita elementmetoden idag är ett generellt ingenjörsverktyg för att lösa partiella differentialekvationer som används i allt konstruktionsarbete anser vi att studenterna skall undervisas tidigt i metoden.

Resultatet mätt i antal godkända på kurserna har förbättrats något i matematikkurserna. Speciellt är resultat för kursen Matematisk analys i flera variabler mycket glädjande: 80% av de som tenterade är godkända. Detta är ett mycket bra resultat för en kurs i flervariabelanalys i årskurs 1. Tidigare år har resultatet varit 40–60% godkända. Resultaten på kurserna i Mekanik och hållfasthetslära är oförändrade jämfört tidigare läsår. Självklart är det för tidigt att säga något generellt om resultatet efter ett år men det ser lovande ut. Ansvarig matematiklärare, professor Stig Larsson, tilldelades Maskinteknikprogrammets pedagogiska pris för sina insatser för utvecklandet och genomförandet av matematikkurserna. Priset baseras på en omröstning bland studenterna. Stig erhöll även Chalmers pedagogiska pris 2008 för sitt ”arbete med att integrera matematikämnet i ingenjörsämnet”. Pristagarna utses av en jury. Studenternas sammanfattande betyg på matematikkurserna har för alla kurser legat över fyra på en femgradig skala och slutsatsen är att studenterna är mycket positiva till kurserna och genomförandet

Referenser

[1] http://www.cdio.org.

[2] http://www.chalmers.se/sections/ar_student/programhemsidor/maskinteknik_180_200.

[3] M. Enelund and S. Larsson, ”A computational mathematics education for students of mechanical engineering”, *World Transactions on Engineering and Technology Education*, vol. 5, no. 2, pp. 329–332, 2006.

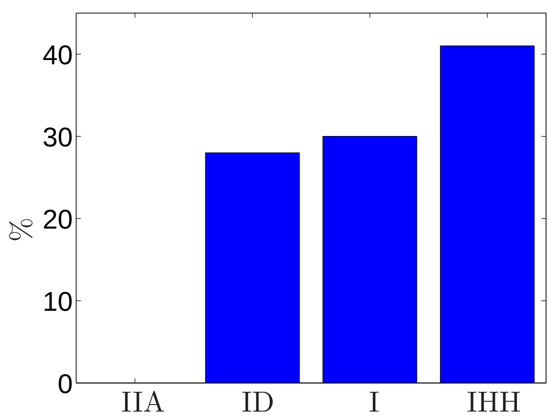
[4] R. A. Adams, *Calculus: A Complete Course*, Sixth Edition, Addison Wesley, 2006.

[5] D. C. Lay, *Linear Algebra and Its Applications*, Third Edition Update, Addison Wesley, 2006.

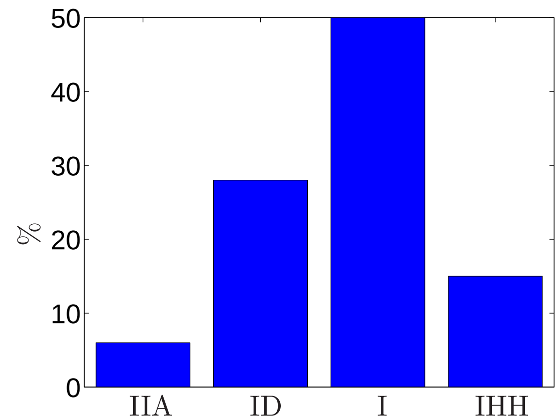
[6] http://www.student.chalmers.se/.

Appendix

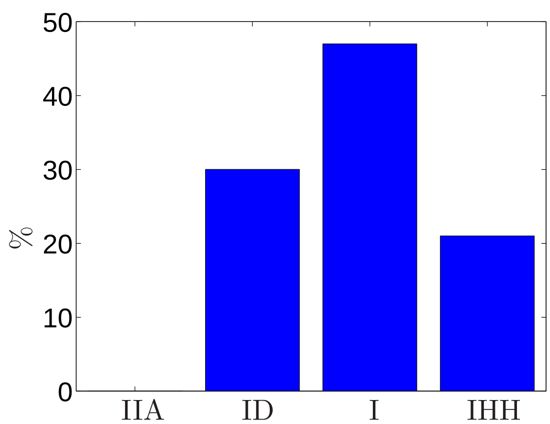
Här visar vi exempel på svar från den web-baserade utvärderingsenkäten i kursen Matematisk analys i flera variabler. Vi fick 46 svar från ca 180 studenter. Enkäten gick även ut till 30 studenter på civilingenjörsprogrammet i Teknisk design som samläser matematiken med maskinteknik men inte har de parallella kurserna i Mekanik & hållfasthetslära. Av svaren att döma verkar svarsfrekvensen vara låg hos studenter från Teknisk design. De torde också ha svarat att de inte har haft någon nytta av samarbetet med den parallella kursen i Mekanik & hållfasthetslära. Teknisk design-studenterna hade delvis andra datorövningar än maskinteknikstudenterna.



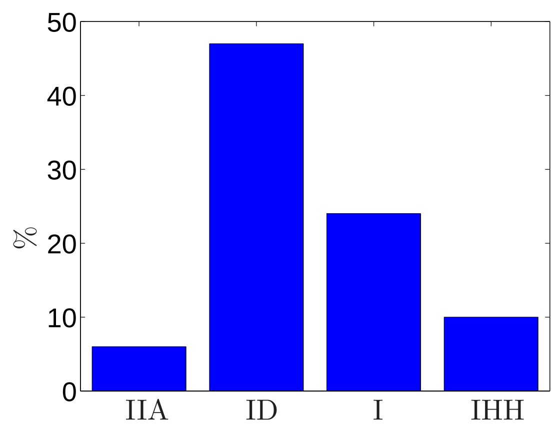
Det är naturligt att använda datorn i matematiken.



Jag förstår grunderna för finita elementmetoden.

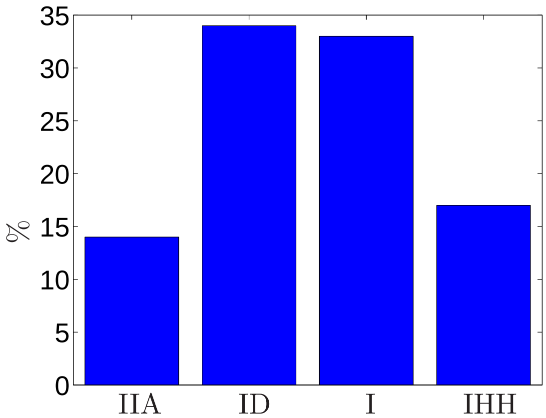


Jag kan formulera randvillkor för hållfasthets- och värmeledningsproblem.

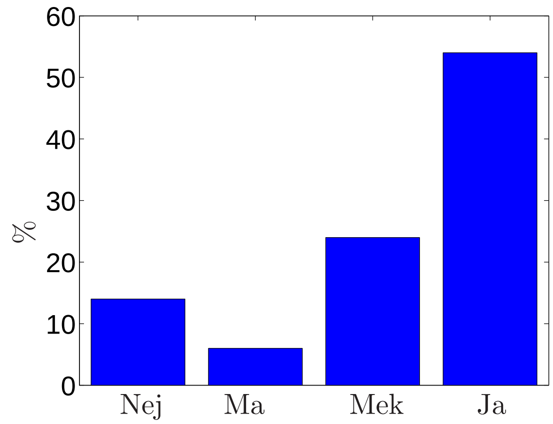


Jag kan lösa maskintekniska problem med finita elementmetoden.

Svarsalternativ: IIA= Instämmer inte alls, ID=Instämmer delvis, I=Instämmer, IHH=Instämmer helt och hållet.



Kopplingen mellan matematikkursen och den parallella kursen i mekanik & hållfasthetslära har ökat motivationen för studierna.



Kopplingen mellan matematikkursen och den parallella kursen i mekanik & hållfasthetslära har underlättat inlärningen.

Svarsalternativ: IIA= Instämmer inte alls, ID=Instämmer delvis, I=Instämmer, IHH=Instämmer helt och hållet.

Svarsalternativ: Nej, Ma=Ja i matematik, Mek=Ja i Mekanik & hållfasthetslära, Ja=Ja i båda kurserna.